

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 07.09.2023

Esercizio 1 (7 punti). Siano X_1 l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - |x|} + \sqrt{1 - |y|} + \log(x^2 + |y|)$$

e

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}.$$

- Rappresentare graficamente gli insiemi X_1 e X_2 .

Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| • X_1 è chiuso | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • X_2 è connesso | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • $(0, \frac{1}{2})$ è un punto interno dell'insieme $X_1 \cap X_2$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • $\overline{X_1} \cap \overline{X_2}$ è convesso | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • $(0, 0) \in \partial X_1 \cap \partial X_2$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Esercizio 2 (8 punti). Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stabilire se

- (i) f è continua in $(0, 0)$;
- (ii) f è derivabile in $(0, 0)$;
- (iii) f è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 3 (8 punti). Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = e^{x-y} - e^x + y.$$

- (i) Determinare i punti critici di f e classificarli.
- (ii) Calcolare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f, \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f$$

e dire se si tratta di massimo e minimo assoluti.

Esercizio 4 (9 punti).

(1) Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + x^3) dx dy.$$

(2) Sia

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, z^2 \leq 1\}.$$

Usando il punto (1) calcolare l'integrale

$$\iiint_E [2ze^{z^2} + \frac{3}{2}z^2(\sqrt{x^2 + y^2} + x^3)] dx dy dz.$$